

ANALYSE DIMENSIONNELLE

« Ne jamais faire de calculs avant d'en connaître le résultat ».

Cet énoncé de John Wheeler, physicien théoricien américain (1911-2008), qui peut sembler a priori paradoxal, signifie concrètement : ne pas se lancer dans un calcul compliqué sans avoir trouvé au préalable la forme **qualitative** du résultat, avec l'analyse dimensionnelle.

L'analyse dimensionnelle permet en effet de trouver **la forme** de la solution de certains problèmes, sans avoir à résoudre d'équations.

C'est une méthode simple, claire et intuitive pour identifier le nombre minimal de paramètres et pour voir comment ils varient.

Le principe est que les parties droite et gauche d'une équation doivent être **homogènes**, c'est à dire **avoir la même dimension**.

EXEMPLE 1

Pourquoi les enfants jouent et courent pied nus sur les rochers quand cela nous semble une véritable torture ?

Les 3 dimensions utilisées ici seront la longueur L, la masse M et le temps T.

Le symbole ' ~ ' signifie ' proportionnel à '.

La douleur est liée à la pression du pied sur les petites aspérités.

La pression P est une force F divisée par une surface

$$P = F/S$$

La force F est proportionnelle au poids de l'individu donc à sa masse M

$$F \sim M$$

$$\text{Donc } P \sim M/S.$$

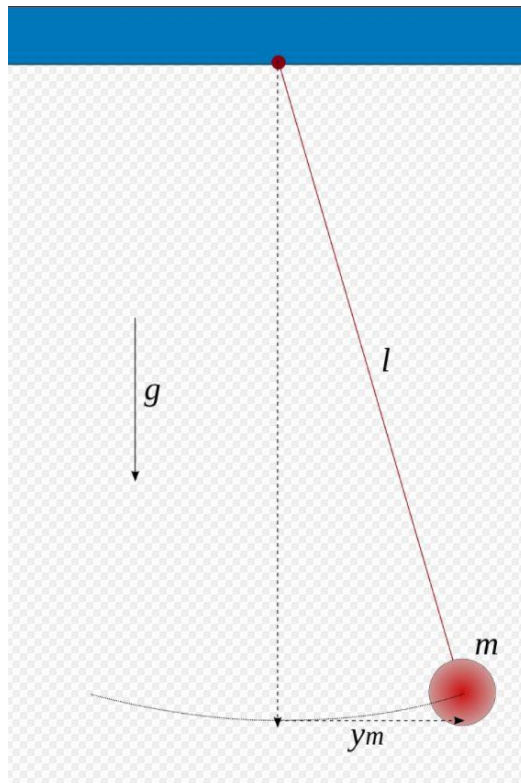
Un individu de taille L, a une surface S proportionnelle à L^2 , $S \sim L^2$, et un volume donc une masse M proportionnelle à L^3 , $M \sim L^3$.

La **pression** finalement est donc $P \sim L^3/L^2 \sim L$ **proportionnelle à la taille**

La pression croissant avec la taille de l'individu on comprend pourquoi les grands ont mal aux pieds sur les rochers...

EXEMPLE 2

Période du pendule



https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_simple

Nous allons rechercher la valeur de la période d'un pendule sans considération d'énergie ou autre paramètre.

Par simple observation on se doute que cette période dépend de sa longueur L , peut-être de sa masse M (on verra que ce n'est pas la réalité) et évidemment de la gravité g qui le tire vers le bas.

Sur Terre, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

La période est le temps T pour revenir à sa position de départ.

On pose donc l'équation aux dimensions :

$$T \sim k M^a L^b g^c \quad k \text{ constante numérique}$$

Il reste à déterminer les exposants a , b et c puis la constante k .

Pour g , accélération de la pesanteur égale à $9,8 \text{ m/s}^2$, l'équation aux dimensions est donc :

$$g \sim L/T^2 = LT^{-2}$$

Reporté dans l'expression de T :

$$T \sim k M^a L^b (LT^{-2})^c = k M^a L^b L^c T^{-2c}$$

Dans une équation aux dimensions, on doit retrouver exactement les mêmes dimensions de part et d'autre du signe $\sim$.

Pour être homogène à un temps T à gauche, on constate que M à droite doit disparaître, donc $a = 0$. La masse n'intervient donc pas dans la formule.

Puis pour obtenir T il faut que l'exposant $-2c = 1$, $c = -\frac{1}{2}$

Pour que L disparaisse il faut $(b + c) = 0$, donc $b = \frac{1}{2}$.

Revenons à l'équation initiale

$$T \sim k M^0 L^{1/2} g^{-1/2} = k (L/g)^{1/2}$$

$$T \sim k \sqrt{L/g}$$

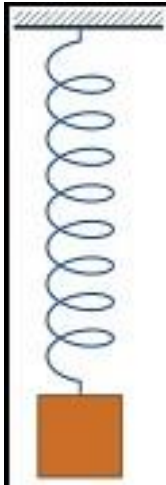
La constante k ne peut se déterminer maintenant que par l'expérience, et on la mesure autour de $6,3$.

La formule exacte est

$$T = 2 \pi \sqrt{L/g}$$

EXEMPLE 3

Système masse-ressort



https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me_masse-ressort

La masse oscille dans le champ de la pesanteur, accélération g , comme dans l'exemple précédent.

La force de rappel F est proportionnelle, à L , élongation du ressort, et à k la raideur du ressort.

$$F = k L \quad \text{Formule de Hook}$$

On cherche une expression pour la période d'oscillation T .

Toujours par simple observation, on se doute que la période dépendra de la masse M et de la raideur k .

$$T \sim c M^a k^b$$

Avec c une constante numérique.

Pour calculer la dimension de $k = F/L$, on remarque que par définition la force F est le poids Mg .

$$Mg \sim M L T^{-2}$$

$$k \sim M L T^{-2} / L = M T^{-2}$$

On revient à T

$$T \sim c M^a (M T^{-2})^b$$

Avec T à gauche il faut donc pour avoir T à droite $-2b = 1$, $b = -\frac{1}{2}$.

Pour que M disparaisse, puisque T est seul à gauche, il faut $a = -b = \frac{1}{2}$.

Reporté dans T on obtient

$$T \sim c M^a k^b = c M^{1/2} k^{-1/2}$$

$$T \sim c \sqrt{M/k}$$

La constante c ne peut se déterminer maintenant que par l'expérience, et on la mesure autour de 6,3.

La formule exacte est

$$T = 2 \pi \sqrt{M/k}$$

Notons que la pesanteur g n'intervient pas dans la formule résultante.

En effet un système masse-ressort oscille aussi bien horizontalement en absence de champs gravitationnels.

Reference : **Les lois d'échelle, Thomas Séon** (Odile Jacob 2018)