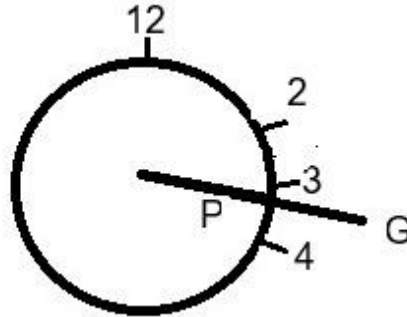


PROBLÈME de l' Horloge

Quand la **P**etite aiguille et la **G**rande aiguille sont alignées entre 3h et 4h la question est :

Quelle heure est-il exactement ?

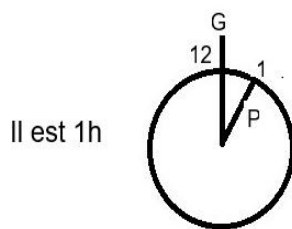


Il existe plusieurs façons de résoudre ce problème avec des équations plus ou moins complexes (voir l'annexe),

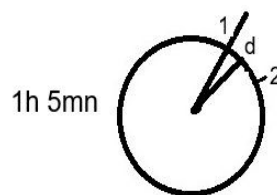
La méthode proposée ici est purement graphique et ne demande qu'une simple division.

Nous allons étudier successivement les cas de 1h puis 2h et enfin 11h pour calculer X dans la valeur de l'affichage de l'heure 3h Xmn .

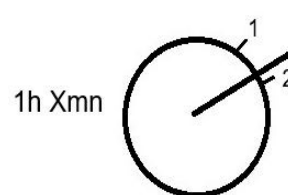
On rappelle que G avance 12 fois plus vite que P .



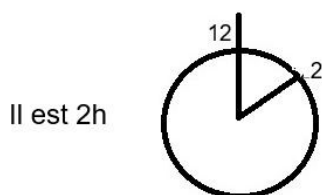
G part de 12
 P part de 1



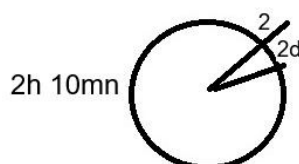
G arrive sur 1
 P a progressé de d
en 5mn



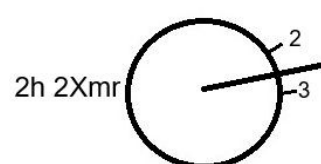
G arrive sur P après X mn pour
rattraper P qui progresse toujours



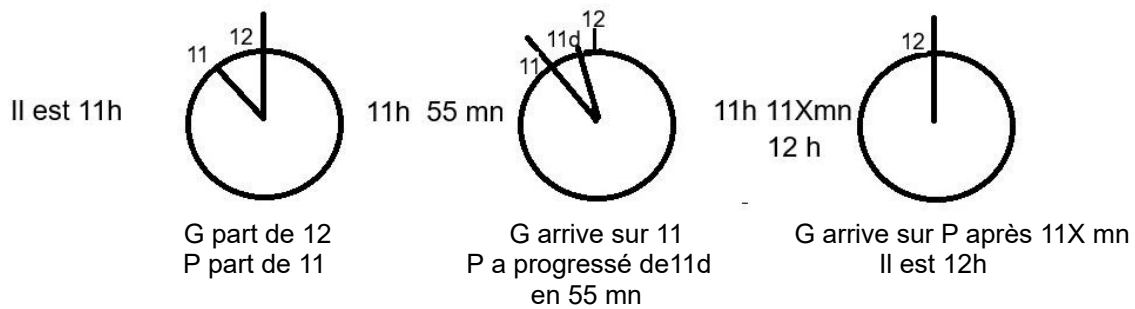
G part de 12
 P part de 2



G arrive sur 2
 P a progressé de $2d$
en 10mn



G arrive sur P après $2X$ mn pour
rattraper P qui progresse toujours



A 11h Xmn correspond 12 h donc $11Xmn = 1h = 60mn$.

$$X = 60/11 \text{ mn} = 5,45 \text{ mn} = 5 \text{ mn } 27s$$

La formule générale pour la superposition des aiguilles entre H et H+1 est donc

$$H \text{ (h) et } 5,45 \times H \text{ (mn)}$$

Par exemple entre 3 et 4h il est 3 h et $5,45 \times 3 \text{ mn} = 3 \text{ h } 16,35mn = 3h \text{ } 16' \text{ } 21''$

PS

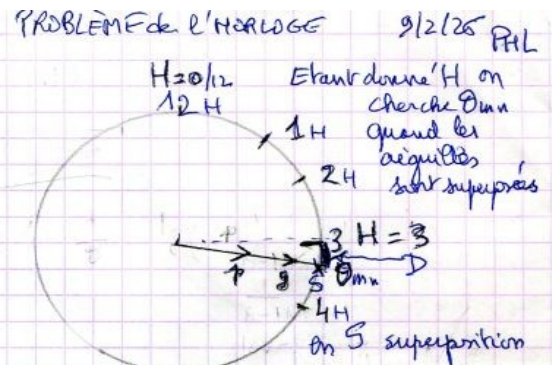
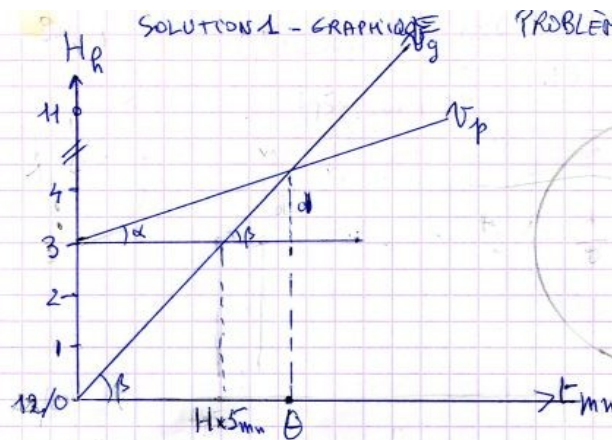
Un raisonnement plus global encore est le suivant :

la superposition ne peut se produire que 11 fois en 12 heures.

Il suffit donc de diviser 12 h par 11 pour trouver la période d'occurrence

$$12h/11 = 12 \times 60/11 \text{ mn} = 720/11 \text{ mn} = 65,45 \text{ mn} = 1h \text{ } 5,45 \text{ mn} = 1h \text{ } 5mn \text{ } 27s$$

ANNEXE



Pour la grande aiguille $V_g = \frac{12h}{60mn}$ et pour la petite $V_p = \frac{1h}{60mn}$

le rapport des vitesses = 12

M varie de 1 à 11 θ_{mn} décalage par rapport à H

$$\tan \alpha = \frac{d}{\theta} \quad \tan \beta = \frac{d}{\theta - 5mn \cdot H} = 12 \tan \alpha = 12 \frac{d}{\theta}$$

$$\frac{1}{\theta - 5H} = \frac{12}{\theta}$$

$$12\theta - 60H = \theta \rightarrow 11\theta = 60H$$

$$\theta = \frac{60}{11} H$$

Ex: $H=3 \mid \theta = \frac{180}{11} = 16,36 mn$
Il est 3h 16,36 mn

$H=6 \mid \theta = \frac{360}{11} = 32,72 mn$
Il est 6h 32,72 mn

$H=10 \mid \theta = \frac{600}{11} = 54,54 mn$
Il est 10h 54,54 mn

SOLUTION 2 + SIMPLÈ

Pour aller de 3H à 5 (portion de superposition des aiguilles) la petite aiguille met le temps x à la vitesse V_p .

Pour couvrir la zone D elle met donc le temps $V_p x$

Pour aller de 12H à 3H la grande aiguille met le temps $3 \times 5mn = 15mn$. La zone D est couverte en $x - 15mn$ à la vitesse V_g .

$$D = V_p x = V_g (x - 15) \quad \text{et comme } V_g = 12 V_p$$

$$V_p x = 12 V_p (x - 15)$$

$$11x = 180 \rightarrow x = \frac{180}{11} = 16,36 mn = 16 mn 21s$$

Il est donc 3h 16' 21" quand les aiguilles se superposent

En général, pour toute heure H

$$V_p x = 12 (x - H \times 5mn)$$

$$x = \frac{60}{11} H mn$$

Après l'heure H_h à la superposition des aiguilles il est donc $H_h \frac{60}{11} mn$ Ex 10h 54' 54"